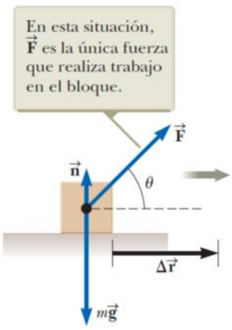
TEMA 4. TRABAJO Y ENERGÍA

1. Trabajo y energía

Hasta ahora hemos analizado el movimiento de partículas utilizando conceptos de cinemática o dinámica como la fuerza y las leyes de Newton. Sin embargo, en algunos casos es difícil analizar un fenómeno físico en estos términos. Una descripción alternativa (y equivalente) se basa en utilizar los conceptos de trabajo y energía. Para empezar, estas magnitudes físicas son escalares a diferencia de la fuerza, lo que puede simplificar el cálculo.

1.1. Definición de trabajo (movimiento uniformemente acelerado).

Consideremos un objeto que describe un movimiento uniformemente acelerado debido a una fuerza $\vec{F}$ constante y se desplaza una distancia $\Delta\vec{r}$, como se puede ver en la siguiente figura:



Definimos el trabajo W realizado sobre el bloque como:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre los vectores. La unidad de trabajo y energía en el SI es el julio (J), que se define como:

$$1\,J = 1N \cdot m$$

Además, suponiendo el objeto tiene una velocidad $v = |\vec{v}|$ y masa m, podemos definir la **energía cinética** K como:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Existe una estrecha relación entre trabajo y energía cinética. Para verla en el **movimiento uniformemente acelerado**, necesitamos recurrir a la expresión que relaciona velocidad y distancia:

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2 + 2\vec{a} \cdot \Delta\vec{r}$$

Supongamos que $\vec{a}$ y el desplazamiento son en la misma dirección ($\theta = 0$), entonces:

$$|\vec{a}| = \frac{\left|\vec{v_f}\right|^2 - |\vec{v_i}|^2}{2|\Delta\vec{r}|}.$$

Sustituyendo en la expresión del trabajo, obtenemos:

$$\begin{aligned} W = \left|\vec{F}\right||\Delta\vec{r}| &= \frac{m\left(\left|\vec{v_f}\right|^2 - |\vec{v_i}|^2\right)}{2|\Delta\vec{r}|}|\Delta\vec{r}| \\ &= \frac{m}{2}(|\vec{v_i}|^2 - |\vec{v_i}|^2) \\ &= K_f - K_i = \Delta K. \end{aligned}$$

Aunque esta relación la derivamos para el movimiento uniformemente acelerado, se cumple siempre (incluso si la fuerza no es constante). El trabajo W realizado sobre un objeto o partícula en un intervalo Δt está dado por el **teorema de trabajo-energía cinética**:

$$W = K_f - K_i$$

Podemos observar que, si el trabajo es positivo, la energía cinética de la partícula aumenta, y si es negativo disminuye.

1.2. Fuerzas conservativas y no conservativas: energía potencial

Aparte de la energía cinética, podemos introducir la energía potencial en el caso de que el trabajo sea independiente de la trayectoria seguida. Podemos clasificar la fuerza en dos grandes grupos:

- **Fuerza conservativa** $\vec{F_c}$: El trabajo W_c. realizado por la fuerza es independiente de la trayectoria seguida. Solo depende del punto inicial y final. Podemos introducir una magnitud conocida como **energía potencial** U tal que:

$$W_c - -(U_f - U_i)$$

Observar que si la trayectoria es cerrada el **trabajo conservativo** es nulo. Por ejemplo, la fuerza gravitatoria es conservativa y la **energía potencial gravitatoria** se expresa como:

$$U_g = mgh$$

donde h es la distancia vertical a la superficie terrestre.

Otro ejemplo de fuerza conservativa es la fuerza elástica ejercida por un muelle (ideal). La energía potencial asociada se expresa como:

$$U_e = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

siendo k la constante de elasticidad del muelle y l_0 su elongación natural.

- **Fuerza no-conservativa** $\overrightarrow{F_{nc}}$: No existe una U tal que se cumple la condición de las fuerzas conservativas. Por ejemplo, la fuerza de rozamiento es no-conservativa. Por tanto, el trabajo realizado por estas fuerzas se obtiene como:

$$W_{nc} = \overrightarrow{F_{nc}} \cdot \Delta\vec{r}$$

1.3. Teorema trabajo-energía

Supongamos un objeto que experimenta una fuerza conservativa con potencial U, una fuerza externa $\overrightarrow{F_{ext}}$ y una fuerza no conservativa $\overrightarrow{F_{nc}}$. El trabajo neto realizado sobre el objeto en un intervalo δt es la suma de los trabajos debido a cada fuerza:

$$W_{neto} = W_{ext} + W_c + W_{nc}$$
$$W_{neto} = W_{ext} - \Delta U + W_{nc}$$

Del teorema de trabajo-energía cinética ($W_{neto} = \Delta K$) despejamos el trabajo externo:

$$W_{ext} = \underbrace{\Delta K + \Delta U}_{\Delta E_{mec}} - W_{nc}$$
$$= \Delta E_{mec} - W_{nc}$$

donde hemos definido la **energía mecánica**:

$$E_{mec} = K + U$$

Esta expresión es conocida como teorema de trabajo-energía, y se puede aplicar en la resolución de problemas generales.

En el caso de que no se ejerce ningún trabajo externo ($W_{ext} = 0$) sobre el objeto ni tampoco exista trabajo no conservativo ($W_{nc} = 0$), el teorema de trabajo-energía implica la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_{mec} = 0 \Leftrightarrow K_i + U_i = K_f + U_f$$

***Problema**: Un bloque de masa $5\ kg$, inicialmente en reposo y que descansa sobre un plano horizontal, es empujado hacia la derecha por una fuerza horizontal constante de módulo $100\ N$. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque y la superficie es igual a 0,25. Calcular:*

- *La velocidad del bloque después de haberse desplazado $x = 30\ m$.*

  1. Plantear el diagrama de fuerzas para el bloque. Dibujar la fuerza externa, la normal, el peso y el rozamiento.

  2. Calcular la fuerza normal y de rozamiento. Al tratarse de un plano horizontal, esta última es igual en magnitud y opuesta en dirección al peso.

     $$|\overrightarrow{F_N}| = mg$$

     La fuerza de rozamiento es:

     $$|\overrightarrow{F_R}| = \mu|\overrightarrow{F_N}| = \mu mg$$

  3. Calcular la aceleración del bloque aplicando la ley de Newton,

     $$ma_x = |\overrightarrow{F_{ext}}| - \mu mg \Rightarrow a_x = \frac{|\overrightarrow{F_{ext}}| - \mu mg}{m},$$

     mientras que $a_y = 0$

  4. Como se trata de un movimiento uniformemente acelerado podemos utilizar la relación entre velocidad y desplazamiento:

     $$|\vec{v}|^2 = |\vec{v_i}|^2 + 2\vec{a} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{v_i}|^2 + 2a_x r_x$$

     $$|\vec{v}| = \sqrt{2r_x\left(\frac{|\overrightarrow{F_{ext}}| - \mu mg}{m}\right)} = 32{,}44\ m/s$$

- *El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en el trayecto recorrido por el bloque.*

  1. Utilizamos la definición del trabajo:

$$W_R = \overrightarrow{F_R} \cdot \Delta\vec{r} = -\left|\overrightarrow{F_R}\right||\Delta\vec{r}| = -\mu mg|\Delta\vec{r}| = 367{,}5\,J$$

- *La velocidad que tendría el bloque si hubiese recorrido el trayecto de 30 m a lo largo de dicho plano si la fuerza formase un ángulo de 45 con respecto a la horizontal.*

  Planteamos el nuevo diagrama de fuerzas y vemos que hay que sustituir $\left|\overrightarrow{F_{ext}}\right|$ por $\left|\overrightarrow{F_{ext}}\right|cos\theta$. Esto es:

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v_i}|^2 + 2\vec{a} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{v_i}|^2 + 2a_x r_x$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2r_x\left(\frac{\left|\overrightarrow{F_{ext}}\right|cos45 - \mu mg}{m}\right)} = 26{,}48\ m/s$$

1.4. Potencia

La **potencia** asociada a un trabajo W es:

$$P = \frac{dW}{dt},$$

y se suele medir en la unidad **vatio** (W):

$$1\,W = 1\ \frac{N \cdot m}{s} = 1\ \frac{J}{s}$$